指数関数のデカウス曲線が、どのようなプロットになるか考えてみました。

まずは、一番簡単な $y = e^x$ を、$x = s+it$ に対してプロットしてみます。

$$y = e^s \cdot e^{it}$$
$$= e^s(\cos t + i\sin t)$$

これは、

$t = 0$ で、　$y = e^s$

$t = p$ で、　$y = -e^s$

$t = 2p$ で、　$y = e^s$ ・・・

すなわち、虚部が p 増える毎に、$y = e^s$ と $y = -e^s$ が交互に表れるプロットになります（Fig.1)。今まで見ていた $y = e^x$ のグラフは、その一部でしかなかったのですね。

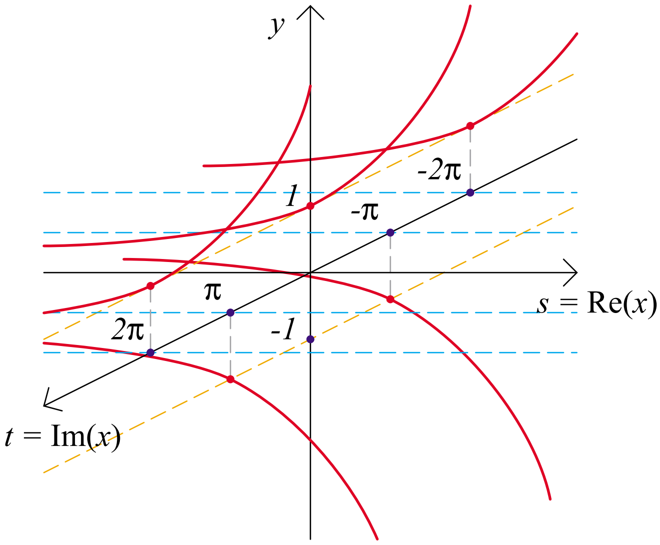

Fig.1

次に、$y = (-1)^x$ の $x = s+it$ に対するプロットを、同様に考えてみます。

$$y = (e^{pi})^{(s+it)}$$
$$= e^{ips} \cdot e^{-pt}$$
$$= e^{-pt}(\cos ps + i\sin ps)$$

これは、

$s = 0$ で、　$y = e^{-pt}$

$s = 1$ で、　$y = - e^{-pt}$

$s = 2$ で、　$y = e^{-pt}$ ・・・

すなわち、実部が 1 増える毎に、$y = e^{-pt}$ と $y = - e^{-pt}$ が交互に表れるプロットになります（Fig.2)。$y = e^x$ のグラフを、90°回転させた感じになりました。

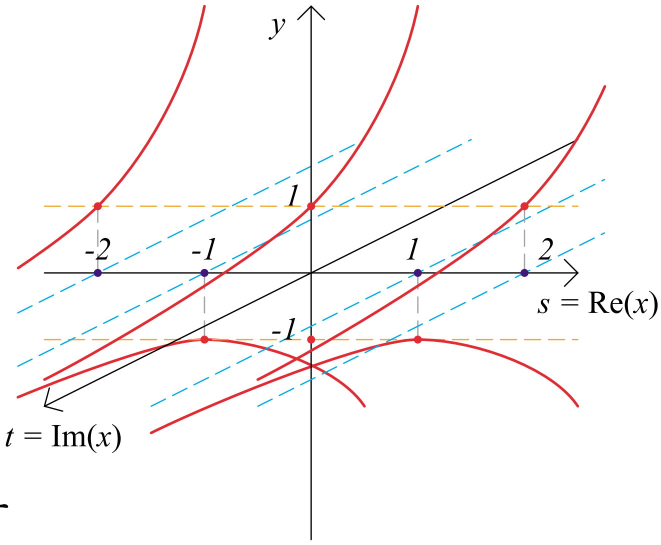

Fig.2

ではさらに拡張して、一般の複素数 $a+bi = r \cdot e^{iq}$ の指数関数のプロットを考えます。

$$y = (r \cdot e^{iq})^{(s+it)}$$
$$= r^{(s+it)} \cdot e^{iqs} \cdot e^{-qt}$$
$$= r^s \cdot e^{-qt}\{\cos(\log r \cdot t) + i\sin(\log r \cdot t)\}(\cos qs + i\sin qs)$$
$$= r^s \cdot e^{-qt}\{\cos(\log r \cdot t + qs) + i\sin(\log r \cdot t + qs)\}$$

従って、

$\log r \cdot t+qs = 0$ で、　$y = r^s \cdot e^{-qt}$

$\log r \cdot t+qs = p$ で、　$y = -r^s \cdot e^{-qt}$

$\log r \cdot t+qs = 2p$ で、　$y = r^s \cdot e^{-qt}$・・・

となり、さきほどまでのプロットを、y 軸を中心に何度か回転させたプロットになりました（Fig.3)。

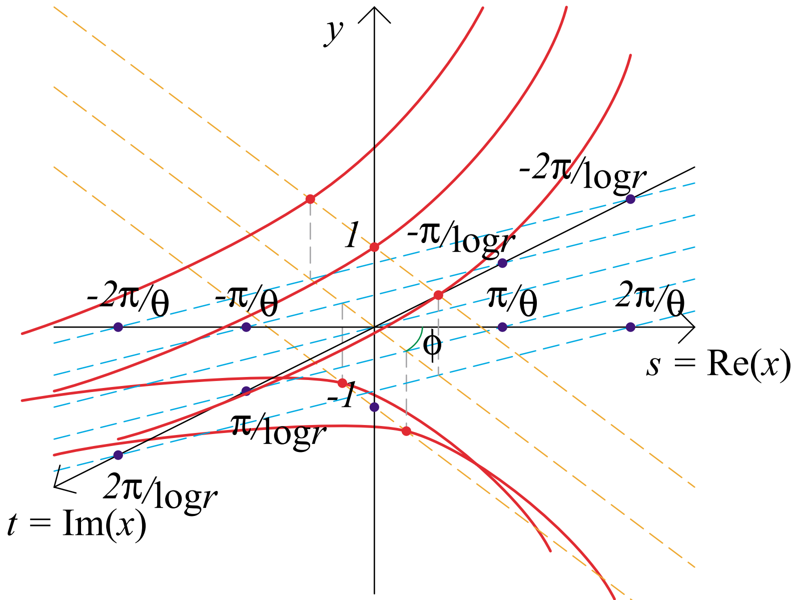

Fig.3

ちなみに、虚軸からの角度が $f = \tan^{-1}(q / \log r)$ となるように回転しています。

つまり、$q = 0°$ の時（すなわち $a+bi = r \cdot e^{iq}$ が正の実数の時）は $f = 0°$ となり、Fig.1 のようなプロットになり、$r = 1$ の時（すなわち $a+bi$ の絶対値が 1 の時）は $f = 90°$ となり、Fig.2 のようなプロットになります。

それ以外は、それらを何度か回転したプロットになります。

結局、指数関数のデカウス空間におけるプロットは、全て Fig.1 のようなプロットを、y 軸まわりに回転させた物で表される事になりますね。

（もちろん、変化率の違いはありますが・・・概形は同じですね）

正の実数値に対する指数関数のプロットは $q = 0°$ の時、負の実数値に対するプロットは $q = 180°$ の時となります。

$y = a^x$ で、a の値を正から負へと徐々に変えて行った時、$r = 0$ の前後で何故グラフの形が急激に変わってしまうのか、どのような変化が起きているのか不思議に思っていましたが、グルッと回転していたのですね。

位相が完全に逆転している前後で考えていたワケですから、不連続に見えるのも当然ですね（＾＾;)

2002 年 1 月 10 日　chun